



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ A SATELOR DIN ROMÂNIA

ETAPA JUDEȚEANĂ 16.03.2024

CLASA a V-a

Problema 1. (7 puncte)

a) Determinați ultima cifră a numărului

$$A = 10^{11} + 11^{12} + 12^{13} + 13^{14} + 14^{15} + 15^{16} + 16^{17} + 17^{18} + 18^{19} + 19^{20}$$

b) Aflați numărul $\overline{abc}$, știind că $2 \cdot c = 19 : a - 7 \cdot b$

Problema 2. (7 puncte)

Aflați restul împărțirii numărului

$$x = 7 + 97 + 997 + 9997 + \dots + \underbrace{999 \dots 997}_{\text{de 2024 ori}} + 2024 \text{ la } 3.$$

Problema 3. (7 puncte)

Moș Cizmă le propune celor patru nepoți un joc matematic de echipă. Le dă fiecăruia un bilet cu numere. Sandală are pe bilet $2 \cdot n + 1$, Pantof are pe bilet $3 \cdot n + 2$, Adidas are $4 \cdot n + 3$, iar Nike are pe bilet $6 \cdot n + 1$, unde n este număr natural prim.

Moș Cizmă îi provoacă să determine numerele naturale n , pentru care cele patru numere sunt prime în același timp. Puteți să-i ajutați? Dacă da, care sunt numerele n ?

Problema 4. (7 puncte)

Pe o masă sunt expuse mai multe bilete, după următoarea regulă:

Bilet 1		Bilet 2		Bilet 3		Bilet 4		Bilet 5	
1	4	8	7	15	10	22	13	29	16

Miți afirmă că are biletul 27 și pe el are numărul 83. Piți afirmă că are biletul 35 și suma numerelor de pe bilet este 340. Riți afirmă că are biletul 45 și că suma tuturor numerelor de pe biletele 1, 2, 3, 4, 5, ..., 45 este 10125. Câștigă jocul cea care spune adevărul. Aflați cine a câștigat.

*Subiectele au fost - propuse de prof. Simona Maria Pop - Colegiul Augustin Maior Cluj-Napoca
prof. Anca Cristina Hodorogea - ISJ Cluj
prof. Emilia Copaciu - Colegiul Ana Aslan Cluj-Napoca
- traduse de prof. Edit Szasz, Colegiul Tehnic Turda*

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timpe efectiv de lucru - 2 ore.

**„Binele ce-l faci la oarecine, ți-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann**

Succes!

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ A SATELOR DIN ROMÂNIA
BAREM CORECTARE – ETAPA JUDEȚEANĂ
CLASA a V-a 16.03.2024

Problema 1. (7 puncte)

a) Determinați ultima cifră a numărului

$$A = 10^{11} + 11^{12} + 12^{13} + 13^{14} + 14^{15} + 15^{16} + 16^{17} + 17^{18} + 18^{19} + 19^{20}$$

b) Aflați numărul $\overline{abc}$, știind că $2 \cdot c = 19 : a - 7 \cdot b$

Soluție:

a) $U(A) = U(0 + 1 + 2 + 9 + 4 + 5 + 6 + 9 + 2 + 1) = 9 \dots \dots \dots (4p)$

b) $2 \cdot c + 7 \cdot b = 19 : a \Rightarrow a = 1 \dots \dots \dots (2p)$

$$2 \cdot c + 7 \cdot b = 19 \Rightarrow b = 1, c = 6, \overline{abc} = 116 \dots \dots \dots (1p)$$

Problema 2. (7 puncte)

Aflați restul împărțirii numărului

$$x = 7 + 97 + 997 + 9997 + \dots + \underbrace{999 \dots 997}_{\text{de 2024 ori}} + 2024 \text{ la } 3.$$

Soluție:

$$x = (3 \cdot 2 + 1) + (3 \cdot 32 + 1) + (3 \cdot 332 + 1) + \dots + \left(3 \cdot \underbrace{333 \dots 332}_{\text{de 2024 ori}} + 1 \right) + 2024 \dots \dots \dots (3p)$$

$$x = 3 \cdot \left(2 + 32 + 332 + \dots + \underbrace{333 \dots 332}_{\text{de 2024 ori}} \right) + 2025 + 2024$$

$$x = 3 \cdot \left(2 + 32 + 332 + \dots + \underbrace{333 \dots 332}_{\text{de 2024 ori}} \right) + 4049 \dots \dots \dots (2p)$$

$$x = 3 \cdot \left(2 + 32 + 332 + \dots + \underbrace{333 \dots 332}_{\text{de 2024 ori}} \right) + 3 \cdot 1349 + 2, \quad R = 2 \dots \dots \dots (2p)$$

„Binele ce-l faci la oarecine, ți-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann

Felicitări!

Problema 3. (7 puncte)

Moș Cizmă le propune celor patru nepoți un joc matematic de echipă. Le dă fiecăruia un bilet cu numere în funcție de n , număr natural prim. Sandală are pe bilet $2n + 1$, Pantof are pe bilet $3n + 2$, Adidas are $4n + 3$, iar Nike are pe bilet $6n + 1$.

Moș Cizmă îi provoacă să determine numerele naturale n , pentru care cele patru numere sunt prime în același timp. Puteți să-i ajutați? Dacă da, care sunt numerele n ?

Soluție:

Pentru $n = 2$ observăm că Pantof obține 8, care nu este prim.....(1p)

Pentru $n = 3$ observăm că Adidas obține 15, care nu este prim(1p)

Pentru $n = 5$ observăm că:

Sandală obține 11, Pantof obține 17, Adidas obține 23, Nike obține 31, care toate sunt prime(2p)

Pentru $n \geq 5$, putem avea următoarele forme pentru n : $5k, 5k + 1, 5k + 2, 5k + 3, 5k + 4$

Dacă $n = 5k$, nu avem numere prime pentru orice $k \geq 2$(1p)

Dacă $n = 5k + 1$ Pantof nu are nr. prim, dacă $n = 5k + 2$ Sandală nu are nr. prim, dacă $n = 5k + 3$ Adidas nu are nr. prim, dacă $n = 5k + 4$ Nike nu are nr. prim.(2p)

Atunci singura soluție este $n = 5$

Problema 4. (7 puncte)

Au fost distribuite bilete construite după următoarea regulă matematică:

Bilet 1		Bilet 2		Bilet 3		Bilet 4		Bilet 5	
1	4	8	7	15	10	22	13	29	16

Miți afirmă că are biletul 27 și pe el are numărul 83. Piți afirmă că are biletul 35 și suma numerelor de pe bilet este 340. Riți afirmă că are biletul 45 și că suma tuturor numerelor de pe biletele 1,2 ,3,4,5,...,45 este 10125. Câștigă jocul cea care spune adevărul. Aflați cine a câștigat.

Soluție:

183	82
-----	----

 Bilet 27 , Miți nu spune adevărul(2p)

239	106
-----	-----

 Bilet 35 , Piți nu spune adevărul(2p)

309	136
-----	-----

 Bilet 45 ,(1p)

$S=1+8+15+....+309+4+7+10+...+136=6975+3150=10125$, Riți spune adevărul.....(2p)

„Binele ce-l faci la oarecine, ți-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann

Felicitări!



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ A SATELOR DIN ROMÂNIA

ETAPA JUDEȚEANĂ 16.03.2024

CLASA a VI-a

Problema 1. (7 puncte)

Se consideră mulțimile A și B , finite și nedisjuncte. Dacă cardinalul mulțimii $A \cap B$ reprezintă 25% din cardinalul mulțimii A și 20% din cardinalul mulțimii B , să se determine cât la sută reprezintă cardinalul mulțimii $A \setminus B$ din cardinalul mulțimii $B \setminus A$.

Problema 2. (7 puncte)

Numerele naturale nenule a, b, c, d sunt invers proporționale cu numerele $\frac{1}{2}, \frac{1}{3a}, \frac{1}{4b}, \frac{1}{5c}$, iar $2a + \frac{2b}{3a} + \frac{c}{2b} + \frac{4d}{5c} = 24$.

- Să se determine numerele a, b, c, d .
- Stabiliți dacă, adunând, câte două, câte trei, sau câte patru numerele a, b, c, d se poate obține un număr natural pătrat perfect.

Problema 3. (7 puncte)

Determinați numerele întregi x pentru care fracția $\frac{x^2+4}{x+2}$ este număr întreg.

Problema 4. (7 puncte)

Fie triunghiul ABC cu $\sphericalangle BAC = 90^\circ$. Bisectoarele interioare ale unghiurilor ABC și ACB intersectează laturile AC și AB în punctele N , respectiv M . Notăm cu P și Q picioarele perpendicularelor duse din M și N pe BC . Aflați măsura unghiului PAQ .

(GM nr 1/2024)

*Subiectele au fost - propuse de prof. Sorin Pop – Colegiul de Muzică Sigismund Toduță Cluj-Napoca
prof. Sorin Galea - Colegiul Ana Aslan Cluj-Napoca
prof. Ioan Balica - Inspectoratul Școlar Județean Cluj
- traduse de prof. Edit Szasz, Colegiul Tehnic Turda*

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru - 2 ore.

**„Binele ce-l faci la oarecine, ți-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann**

Succes!

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ A SATELOR DIN ROMÂNIA
BAREM CORECTARE – ETAPA JUDEȚEANĂ
CLASA a VI-a 16.03.2024

Problema 1. (7 puncte)

Se consideră mulțimile A și B , finite și nedisjuncte. Dacă cardinalul mulțimii $A \cap B$ reprezintă 25% din cardinalul mulțimii A și 20% din cardinalul mulțimii B , să se determine cât la sută reprezintă cardinalul mulțimii $A \setminus B$ din cardinalul mulțimii $B \setminus A$.

Soluție:

Fie $\text{card } A = a$ și $\text{card } B = b$. Avem atunci:

$$\text{card}(A \cap B) = 25\% a = 20\% b \Rightarrow \frac{25}{100} a = \frac{20}{100} b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{4}{5} \dots\dots\dots(1p)$$

$$\text{card}(A \setminus B) = \text{card } A \setminus \text{card}(A \cap B) = a - 25\% a = 75\% a = \frac{3}{4} a \dots\dots\dots(2p)$$

$$\text{card}(B \setminus A) = \text{card } B \setminus \text{card}(A \cap B) = b - 20\% b = 80\% b = \frac{4}{5} b \dots\dots\dots(2p)$$

$$\text{card}(A \setminus B) = x\% \cdot \text{card}(B \setminus A) \Rightarrow \frac{3}{4} a = \frac{x}{100} \cdot \frac{4}{5} b \Rightarrow x = 100 \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \Rightarrow x = 75 \Rightarrow x\% = 75\% \dots\dots\dots(2p)$$

Problema 2. (7 puncte)

Numerele naturale nenule a, b, c, d sunt invers proporționale cu numerele $\frac{1}{2}, \frac{1}{3a}, \frac{1}{4b}, \frac{1}{5c}$, iar

$$2a + \frac{2b}{3a} + \frac{c}{2b} + \frac{4d}{5c} = 24.$$

a) Să se determine numerele a, b, c, d .

b) Stabiliți dacă, adunând, câte două, câte trei, sau câte patru numerele a, b, c, d se poate obține un număr natural pătrat perfect.

Soluție:

$$\mathbf{a)} \quad \frac{a}{2} = \frac{b}{3a} = \frac{c}{4b} = \frac{d}{5c} = k, k \neq 0 \dots\dots\dots(1p)$$

$$a = 2k; \quad \frac{b}{3a} = k \Rightarrow \frac{2b}{3a} = 2k; \quad \frac{c}{4b} = k \Rightarrow \frac{2c}{4b} = \frac{c}{2b} = 2k; \quad \frac{d}{5c} = k \Rightarrow \frac{4d}{5c} = 4k \dots\dots\dots(2p)$$

$$4k + 2k + 2k + 4k = 24 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow a = 4, b = 24, c = 192, d = 1920 \dots\dots\dots(2p)$$

b) Se obțin următoarele sume: 28, 196, 1924, 216, 1944, 2112, 220, 1948, 2116, 2136, 2140.

$$a + c = 196 = 14^2 \text{ și } a + c + d = 2116 = 46^2 \text{ sunt pătrate perfecte } \dots\dots\dots(2p)$$

„Binele ce-l faci la oarecine, ți-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann

Felicitări!

Problema 3. (7 puncte)

Determinați numerele întregi x pentru care fracția $\frac{x^2+4}{x+2}$ este număr întreg.

Soluție:

$$\left. \begin{array}{l} x+2 \mid x^2+4 \\ x+2 \mid x+2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+2 \mid x^2+4 \\ x+2 \mid x^2+2x \end{array} \right\} \Rightarrow x+2 \mid 2x-4 \dots\dots\dots(3p)$$

$$\left. \begin{array}{l} x+2 \mid 2x-4 \\ x+2 \mid x+2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+2 \mid 2x-4 \\ x+2 \mid 2x+4 \end{array} \right\} \Rightarrow x+2 \mid 8 \dots\dots\dots(3p)$$

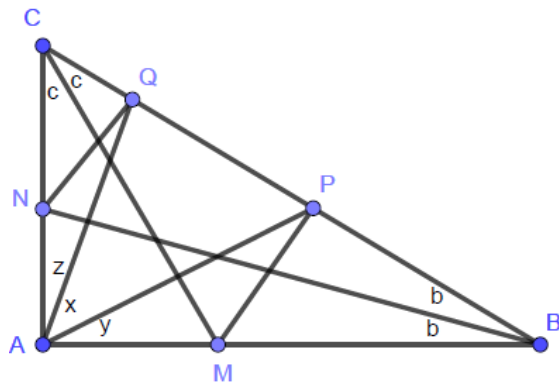
$$x+2 \in D_8 = \{-8; -4; -2; -1; 1; 2; 4; 8\} \Rightarrow x \in \{-10; -6; -4; -3; -1; 0; 2; 6\} \dots\dots\dots(1p)$$

Problema 4. (7 puncte)

Fie triunghiul ABC cu $\sphericalangle BAC = 90^\circ$. Bisectoarele interioare ale unghiurilor ABC și ACB intersectează laturile AC și AB în punctele N , respectiv M . Notăm cu P și Q picioarele perpendicularelor duse din M și N pe BC . Aflați măsura unghiului PAQ .

Soluție:

Desen corect(1p)



$$CM \text{ bisect} \Rightarrow MA=MP \Rightarrow \triangle MAP \text{ isoscel} \Rightarrow \sphericalangle MAP = \sphericalangle MPA = y$$

$$\sphericalangle AMP \text{ ext } \triangle MBP \Rightarrow \sphericalangle AMP = 2b + 90^\circ \dots\dots\dots(2p)$$

$$BN \text{ bisect} \Rightarrow NA=NQ \Rightarrow \triangle NAQ \text{ isoscel} \Rightarrow \sphericalangle NAQ = \sphericalangle NQA = z$$

$$\sphericalangle ANQ \text{ ext } \triangle NCQ \Rightarrow \sphericalangle ANQ = 2c + 90^\circ \dots\dots\dots(2p)$$

$$y = \frac{180^\circ - \sphericalangle AMP}{2} = \frac{180^\circ - 90^\circ - 2b}{2} = 45^\circ - b ; z = \frac{180^\circ - \sphericalangle ANQ}{2} = \frac{180^\circ - 90^\circ - 2c}{2} = 45^\circ - c \dots\dots\dots(1p)$$

$$\text{Atunci } x = 90^\circ - y - z = b + c = \frac{\sphericalangle B + \sphericalangle C}{2} = 45^\circ \dots\dots\dots(1p)$$



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ A SATELOR DIN ROMÂNIA

ETAPA JUDEȚEANĂ 16.03.2024

CLASA a VII-a

Problema 1. (7 puncte)

Arătați că, dacă $\sqrt{34xy}$ este număr natural, atunci și $\sqrt{xy}$ este număr natural, unde x și y sunt cifre nenule din sistemul zecimal.

Problema 2. (7 puncte)

a) Dați un exemplu de două numere naturale nenule x și y , care verifică relația:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}.$$

b) Rezolvați ecuația: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$, $x, y \in \mathbb{Z}^*$.

Problema 3. (7 puncte)

Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD < BC$, $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 90^\circ$, iar M este mijlocul laturii AB . Fie $CM \cap AD = \{N\}$. Se dă $DM \perp AC$.

a) Demonstrați că patrulaterul $ACBN$ este paralelogram.

b) Demonstrați că $BD \perp MC$.

Problema 4. (7 puncte)

Se consideră triunghiul ABC și punctele M și N pe latura BC , astfel încât $\frac{AB}{BM} = \frac{BC}{AB}$ și $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle CAN$.

a) Arătați că $AC^2 = BC \cdot CN$.

b) Arătați că triunghiul AMN este isoscel.

Subiectele au fost - propuse de prof. Ioan Balica - Inspectoratul Școlar Județean Cluj

prof. Paula Balica - Școala Gimnazială Ion Agârbiceanu Cluj-Napoca

- traduse de prof. Edit Szasz, Colegiul Tehnic Turda

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru - 2 ore.

„Binele ce-l faci la oarecine, ți-l întoarce vremea care vine”

Anton Pann

Succes!

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ A SATELOR DIN ROMÂNIA
BAREM CORECTARE – ETAPA JUDEȚEANĂ
CLASA a VII-a 16.03.2024

Problema 1. (7 puncte)

Arătați că, dacă $\sqrt{34xy}$ este număr natural, atunci și $\sqrt{xy}$ este număr natural, unde x și y sunt cifre nenule din sistemul zecimal.

Soluție:

$$3400 < \overline{34xy} \leq 3499 \Rightarrow \sqrt{3400} < \sqrt{34xy} \leq \sqrt{3499} \dots\dots\dots(2p)$$

$$58,30 \dots < \sqrt{34xy} \leq 59,15 \dots\dots\dots(1p)$$

$$\sqrt{34xy} \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{34xy} = 59 \Rightarrow \overline{34xy} = 59^2 = 3481 \dots\dots\dots(2p)$$

$$\overline{xy} = 81 \Rightarrow \sqrt{\overline{xy}} = 9 \in \mathbb{N} \dots\dots\dots(2p)$$

Problema 2. (7 puncte)

a) Dați un exemplu de două numere naturale nenule x și y , care verifică relația: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$.

b) Rezolvați ecuația: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$, $x, y \in \mathbb{Z}^*$.

Soluție:

a) Un exemplu dintre următoarele:

$$x = 5, y = 20, \text{ sau } x = 6, y = 12, \text{ sau } x = y = 8, \text{ sau } x = 12, y = 6, \text{ sau } x = 20, y = 5 \dots\dots\dots(1p)$$

$$b) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{4} - \frac{1}{y} = \frac{y-4}{4y} \dots\dots\dots(1p)$$

$$x = \frac{4y}{y-4} \Rightarrow x = \frac{4y-16+16}{y-4} \Rightarrow x = 4 + \frac{16}{y-4} \dots\dots\dots(2p)$$

$$x \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow \frac{16}{y-4} \in \mathbb{Z} \Rightarrow y-4 \in D_{16} \Rightarrow y-4 \in \{-16, -8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8, 16\} \dots\dots\dots(1p)$$

$$y \in \{-12, -4, 2, 3, 5, 6, 8, 12, 20\} \dots\dots\dots(1p)$$

$$(x, y) \in \{(3, -12), (2, -4), (-4, 2), (-12, 3), (20, 5), (12, 6), (8, 8), (6, 12), (5, 20)\} \dots\dots\dots(1p)$$

„Binele ce-l faci la oarecine, ți-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann

Felicitări!

Problema 3. (7 puncte)

Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD < BC$, $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 90^\circ$, iar M este mijlocul laturii AB . Fie $CM \cap AD = \{N\}$. Se dă $DM \perp AC$.

- a) Demonstrați că patrulaterul $ACBN$ este paralelogram.
- b) Demonstrați că $BD \perp MC$.

Soluție:

Desen corect.....(1p)

a) $\triangle NAM \equiv \triangle CBM (C.U.) \Rightarrow NA \equiv BC$ (1p)

$NA \equiv BC, NA \parallel BC \Rightarrow NACB$ este paralelogram.....(1p)

b) $NACB$ este paralelogram $\Rightarrow NB \parallel AC$ (1p)

$DM \perp AC \Rightarrow DM \perp NB$ (1p)

În $\triangle DBN$:

BA, DM sunt înălțimi, $BA \cap DM = \{M\} \Rightarrow M$ este ortocentrul $\triangle DBN \Rightarrow NM \perp BD \Rightarrow MC \perp BD$(2p)

Problema 4. (7 puncte)

Se consideră triunghiul ABC și punctele M și N pe latura BC , astfel încât $\frac{AB}{BM} = \frac{BC}{AB}$ și $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle CAN$.

- a) Arătați că $AC^2 = BC \cdot CN$.
- b) Arătați că triunghiul AMN este isoscel.

Soluție:

Desen corect.....(1p)

a)

$\sphericalangle ACN \equiv \sphericalangle ACB, \sphericalangle CAN \equiv \sphericalangle ABC \Rightarrow \triangle ACN \sim \triangle BCA (U.U.)$ (1p)

$\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{CN}{AC} \Rightarrow AC^2 = BC \cdot CN$(1p)

b) Fie $\frac{AB}{BM} = \frac{BC}{AB}, \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle MBA \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MBA (L.U.L.) \Rightarrow \sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle ACB$ (1p)

$\sphericalangle AMN$ este unghi exterior $\triangle AMB \Rightarrow \sphericalangle AMN = \sphericalangle BAM + \sphericalangle ABM$ (1p)

$\sphericalangle ANM$ este unghi exterior $\triangle ANC \Rightarrow \sphericalangle ANM = \sphericalangle ACN + \sphericalangle NAC$(1p)

Dar $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle ACN, \sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle NAC \Rightarrow \sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ANM \Rightarrow \triangle AMN$ este isoscel.....(1p)



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ A SATELOR DIN ROMÂNIA

ETAPA JUDEȚEANĂ 16.03.2024

CLASA a VIII-a

Problema 1. (7 puncte)

- a) Arătați că $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, pentru orice a, b , numere reale nenule, pozitive.
- b) Demonstrați că $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}} > 6$.

Problema 2. (7 puncte)

Se consideră expresia : $E(x) = \left(\frac{x-6}{x^2-25} + \frac{x}{5-x} - \frac{2x}{x^2+4x-5} : \frac{x^2+x}{1-x^2} + \frac{x^2-x-2}{x^2+6x+5} \right) : \frac{(3x+2)(x-1)}{x^2-25}$,
unde $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -5; -\frac{2}{3}; -1; 0; 1; 5 \right\}$

- a) Arătați că $E(x) = -\frac{3}{x-1}$.
- b) Arătați ca suma soluțiilor întregi ale inecuației $\left| \frac{3}{E(x)} \right| \leq 5$ este număr natural par.

Problema 3. (7 puncte)

Fie pătratul $ABCD$ cu latura de 8 cm , punctele E, F, G, H aparțin laturilor AB, BC, CD respectiv DA astfel încât $AE = BF = CG = DH = \frac{3}{4} \cdot AB$. Pe planul pătratului se ridică perpendiculara $AQ = 4,8\text{ cm}$.

- a) Arătați că $EFGH$ este pătrat.
- b) Arătați că $AF \perp GB$.
- c) Determinați distanța de la punctul Q la dreapta BG .

Problema 4. (7 puncte)

Prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are înălțimea egală cu $8\sqrt{3}\text{ cm}$ și aria triunghiului ΔOAB egală cu $16\sqrt{3}\text{ cm}^2$, unde $\{O\} = BA' \cap AB'$.

- a) Arătați că latura bazei este egală 8 cm .
- b) Arătați că $OE \parallel (ABC)$, unde E este mijlocul lui CC' .
- c) Determinați măsura unghiului format de planele $(BA'E)$ și (ABC) .

Subiectele au fost - propuse de prof. Elena Măgdaș, Școala Gimnazială "Horea" Cluj-Napoca
prof. Ioana Ludușan, Colegiul Național "Gheorghe Șincai" Cluj-Napoca
- traduse de prof. Edit Szasz, Colegiul Tehnic Turda

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru - 2 ore.

„Binele ce-l faci la oarecine, ți-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ A SATELOR DIN ROMÂNIA

BAREM CORECTARE – ETAPA JUDEȚEANĂ

CLASA a VIII-a 16.03.2024

Problema 1. (7 puncte)

a) Arătați că $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, pentru orice a, b , numere reale nenule, pozitive.

b) Demonstrați că $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}} > 6$.

Soluție:

a) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \forall a, b > 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$ (2p)

$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow (a - b)^2 \geq 0, \forall a, b > 0$ (1p)

b)

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \forall a, b > 0, \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2 \Leftrightarrow a = b$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} > 2 \text{ (1p)}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} > 2 \text{ (1p)}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} > 2 \text{ (1p)}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} > 6 \text{ (1p)}$$

Problema 2. (7 puncte)

Se consideră expresia : $E(x) = \left(\frac{x-6}{x^2-25} + \frac{x}{5-x} - \frac{2x}{x^2+4x-5} : \frac{x^2+x}{1-x^2} + \frac{x^2-x-2}{x^2+6x+5} \right) : \frac{(3x+2)(x-1)}{x^2-25}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -5; -\frac{2}{3}; -1; 0; 1; 5 \right\}$

a) Arătați că $E(x) = -\frac{3}{x-1}$.

b) Arătați ca suma soluțiilor întregi ale inecuației $\left| \frac{3}{E(x)} \right| \leq 5$ este număr natural par.

Soluție:

$$a) E = \left(\frac{x-6}{(x-5)(x+5)} - \frac{x}{x-5} + \frac{2}{x+5} + \frac{(x-2)(x+1)}{(x+5)(x+1)} \right) : \frac{(3x+2)(x-1)}{x^2-25} \text{ (1p)}$$

$$E(x) = \left(\frac{-9x-6}{x^2-25} \right) : \frac{(3x+2)(x-1)}{x^2-25} \text{ (1p)}$$

$$E(x) = \left(\frac{-3(3x+2)}{x^2-25} \right) \cdot \frac{x^2-25}{(3x+2)(x-1)} \text{ (1p)}$$

$$E(x) = -\frac{3}{x-1} \text{ unde } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -5; -\frac{2}{3}; -1; 0; 1; 5 \right\} \text{ (1p)}$$

$$b) \left| \frac{3}{E(x)} \right| \leq 5 \Leftrightarrow |-x+1| \leq 5 \text{ (1p)}$$

$$-4 \leq x \leq 6 \text{ } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -5; -\frac{2}{3}; -1; 0; 1; 5 \right\} \text{ (1p)}$$

$$S = 6 \text{ număr natural par (1p)}$$

„Binele ce-l faci la oarecine, ți-l întoarce vremea care vine”

Anton Pann

Felicitări!

Problema 3. (7 puncte)

Fie pătratul $ABCD$ cu latura de 8 cm , punctele E, F, G, H aparțin laturilor AB, BC, CD respectiv DA astfel încât $AE = BF = CG = DH = \frac{3}{4} \cdot AB$. Pe planul pătratului se ridică perpendiculara $AQ = 4,8\text{ cm}$.

- Arătați că $EFGH$ este pătrat.
- Arătați că $AF \perp GB$.
- Determinați distanța de la punctul Q la dreapta BG .

Soluție:

- $\triangle AHE \equiv \triangle BEF \equiv \triangle CFG \equiv \triangle DGH \Rightarrow HE = EF = GF = HG \Rightarrow EFGH$ este romb.....(1p)
 $\sphericalangle AHE + \sphericalangle AEH = 90^\circ, \sphericalangle AHE \equiv \sphericalangle FEB \Rightarrow HEF = 90^\circ \Rightarrow EFGH$ este pătrat..... (1p)
- $\triangle ABF \equiv \triangle BCG \Rightarrow \sphericalangle FAB = \sphericalangle GBC, \sphericalangle FAB + \sphericalangle AFB = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle FTB = 90^\circ$ (1p)
 $\{T\} = AF \cap BG \Rightarrow AF \perp GB$ (1p)
- Aplicăm teorema celor trei perpendiculare $\Rightarrow QT \perp GB \Rightarrow d(Q, GB) = QT$(2p)
 Aplicăm teorema catetei în triunghiul dreptunghic $\triangle ABF \Rightarrow AT = 6,4\text{ cm}$
 Aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle QAT \Rightarrow QT = 8\text{ cm}$ (1p)

Problema 4. (7 puncte)

Prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are înălțimea egală cu $8\sqrt{3}\text{ cm}$ și aria triunghiului $\triangle OAB$ egală cu $16\sqrt{3}\text{ cm}^2$, unde $\{O\} = BA' \cap AB'$.

- Arătați că latura bazei este egală 8 cm .
- Arătați că $OE \parallel (ABC)$, unde E este mijlocul lui CC' .
- Determinați măsura unghiului format de planele $(BA'E)$ și (ABC) .

Soluție:

- $A_{ABB'A'} = 4 \cdot 16\sqrt{3} = 64\sqrt{3}\text{ cm}^2$ (1p)
 $AB = 8\text{ cm}$ (1p)
- Fie $\{F\} = A'E \cap AC$
 $EC \parallel AA', EC = \frac{AA'}{2} \Rightarrow CE$ linie mijlocie $\Rightarrow E$ mijlocul segmentului $A'F$
 O mijlocul segmentului $A'B$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} EC \parallel AA' \\ EC = \frac{AA'}{2} \end{matrix}} \right\} \Rightarrow OE \parallel BF$ (1p)
 $\left. \begin{matrix} OE \parallel BF \\ BF \subset (ABC) \end{matrix} \right\} \Rightarrow OE \parallel (ABC)$ (1p)
- $(A'BE) \cap (ABC) = BF, EC \parallel AA', EC = \frac{AA'}{2} \Rightarrow CA = CF = BC \Rightarrow \triangle ABF$ dreptunghic în B(1p)
 $\left. \begin{matrix} (A'BE) \cap (ABC) = BF \\ A'B \perp BF, A'B \subset (A'BE) \\ AB \perp BF, AB \subset (ABC) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \sphericalangle((A'BE), (ABC)) \Rightarrow \sphericalangle(ABA') \dots\dots\dots(1p)$
 $\triangle ABA'$ dreptunghic în $A \Rightarrow \sphericalangle(ABA') = 60^\circ$(1p)

Metoda 2 pentru punctele a și b

Sau a) $A_{\triangle AOB} = \frac{OM \cdot AB}{2}, OM \perp AB$ (1p)

$$AB = \frac{2 \cdot 16\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = 8\text{ cm} \dots\dots\dots(1p)$$

- $OM \parallel EC, OM = EC \Rightarrow OMCE$ paralelogram(1p)
 $OE \parallel MC, MC \subset (ABC) \Rightarrow OE \parallel (ABC)$ (1p)

„Binele ce-l faci la oarecine, ți-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann